23　平均値の定理・速度

基本問題 ＆ 解法のポイント

39

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，$\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$　$\therefore c=\dfrac{9}{4}$

40

$\vec{v}=\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -6t+5\end{pmatrix}$ より，$t=2$ のとき，$\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\ -7\end{pmatrix}$

よって，$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-7)^2}=\sqrt{53}$

41

$(0,\ f(0))$ における接線の方程式は $y=f'(0)x+f(0)$

よって，$|x|$ が十分小さいとき，$f(x)\approx f'(0)x+f(0)$

ゆえに，$\sqrt{1+x}$ の近似式は $\dfrac{1}{2\sqrt{1+0}}x+\sqrt{1+0}=\dfrac{1}{2}x+1$

A

136

$f(x)=\log(\log x)$（$x>1$）とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$

これと$1<e\leq p<q$から，平均値の定理より，

$\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}=f'(c)$（$e\leq p<c<q$）を満たす$c$が，

すなわち$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}=\dfrac{1}{c\log c}$　（$e\leq p<c<q$）を満たすcが存在する。

ここで，$e<c$より$\dfrac{1}{e\log e}>\dfrac{1}{c\log c}$すなわち$\dfrac{1}{c\log c<\frac{1}{e}}$

よって，$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}<\dfrac{1}{e}$

ゆえに，$\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$

137

$|x|$が十分小さいとき，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{x-0}\approx\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{x-0}$より，

$\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\approx xf'(0)+\tan\left(\dfrac{0}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ここで，$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$より，$f'(0)=1$

また，$\tan\left(\dfrac{0}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

よって，$\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\approx x-1$

ゆえに，$f(x)\approx x-1$

138

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} t^2\cos t \\ t^2\sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\left(t^2\cos t\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(t^2\sin t\right) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2t\cos t-t^2\sin t \\ 2t\sin t+t^2\cos t \end{pmatrix}$$

より，

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\vec{v}\right|}$$
$$=\frac{t^2\cos t\left(2t\cos t-t^2\sin t\right)+t^2\sin t\left(2t\sin t+t^2\cos t\right)}{\sqrt{\left(t^2\cos t\right)^2+\left(t^2\sin t\right)^2}\cdot\sqrt{\left(2t\cos t-t^2\sin t\right)^2+\left(2t\sin t+t^2\cos t\right)^2}}$$
$$=\frac{2t^3}{t^2\sqrt{2t^2\left(t^2+4\right)}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+4}}$$

よって，$\lim_{t\to\infty}\cos\theta(t)=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+4}}=0$

これと，$0\leq\theta(t)\leq\pi$ より，$\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\dfrac{\pi}{2}$

(2)

$\vec{v}=\begin{pmatrix} 2t\cos t-t^2\sin t \\ 2t\sin t+t^2\cos t \end{pmatrix}$において，条件より，$2t\cos t-t^2\sin t=0$

すなわち$t\left(2\cos t-t\sin t\right)=0$

これと$t>0$ より，$2\cos t-t\sin t=0$　・・・①

$t=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（nは負でない整数）は①を満たさないから，$\cos t\neq 0$

よって，①の両辺を$\cos t$ で割って整理することにより，$\tan t=\dfrac{2}{t}$　・・・②

したがって，②を満たす最も小さいものがt_1，次に小さいものがt_2である。

$\tan t$ は $m\pi < t < \dfrac{\pi}{2} + m\pi$（$m$ は負でない整数)において 0 から無限大へ単調増加すること，

および，$\dfrac{2}{t}$ は無限大から 0 へ向かって無限に単調に減少することから，

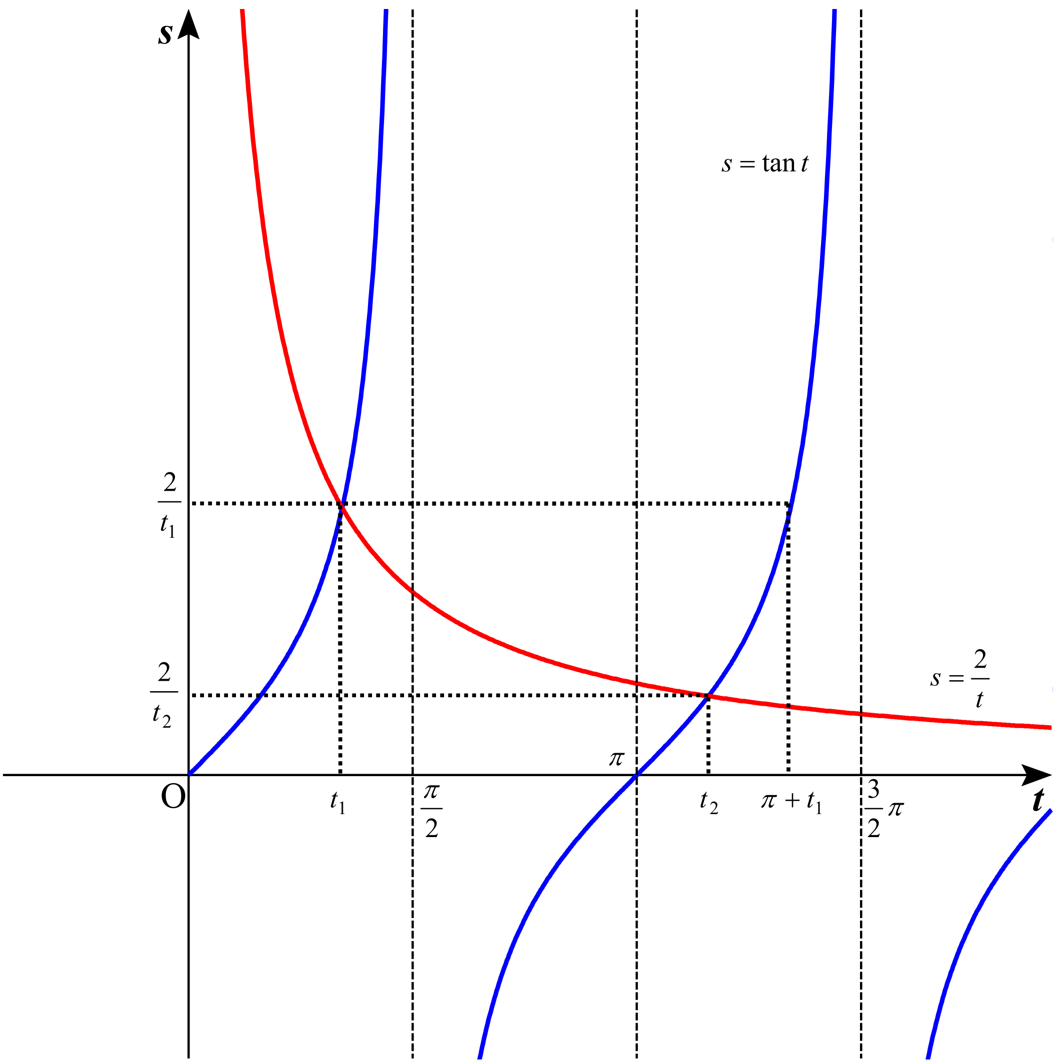
$0 < t_1 < \dfrac{\pi}{2}$，$\pi < t_2 < \dfrac{3}{2}\pi$

また，$t_1 < t_2$ より，$\tan t_1 - \tan t_2 = \dfrac{2}{t_1} - \dfrac{2}{t_2} > 0$

さらに，$\tan t_1 = \tan(\pi + t_1) = \dfrac{1}{t_1}$，$\pi < \pi + t_1 < \dfrac{3}{2}\pi$

よって，$(\pi + t_1) - t_2 > 0$　$\therefore t_2 - t_1 < \pi$

参考図



B

139

(1)

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left\{1+e^{-2(x-1)}-2xe^{-2(x-1)}\right\}$$

$f''(x)=2e^{-2(x-1)}(x-1)$ より，$x>\frac{1}{2}$ における $f'(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$

よって，$x>\frac{1}{2}$ における $f'(x)$ の最小値は 0

また，$x>\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{1}{2}-f'(x)=e^{-2(x-1)}\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ より，$f'(x)<\frac{1}{2}$

ゆえに，$x>\frac{1}{2}$ ならば $0\leq f'(x)<\frac{1}{2}$

(2)

ポイント

$\lim_{n\to\infty}x_n=1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0$

$\left|\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}\right|=|f'(c_n)|$ を使うには $x_n\neq 1$ でなければならない。

$f(1)=1$ だから，$x_n=1$ となるのは $x_0=1$ の場合である。

解

【1】 $x_0=1$ のとき

$x_1=f(x_0)=f(1)=1$ ・・・①

$x_n=1$ とすると，$x_{n+1}=f(x_n)=f(1)=1$ ・・・②

①，②から，数学的帰納法により，$\lim_{n\to\infty}x_n=1$

【2】 $\frac{1}{2}<x_0<1,\ 1<x_0$ のとき

$x_n\neq 1$，$f(x)$ は全実数 x について微分可能だから，平均値の定理より，

$\left|\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}\right|=|f'(c_n)| \quad \therefore |f(x_n)-f(1)|=|f'(c_n)||(x_n-1)|$

これと $x_{n+1}=f(x_n),\ f(1)=1$ より，

$|x_{n+1}-1|=|f'(c_n)||(x_n-1)|$　・・・③
を満たす c_n が 1 と x_n の間に存在する。
ここで，$f'(c_n)$ がとる値の範囲について調べると，

$x_0>\dfrac{1}{2}$ および(1)より，$f'(x_0)>0$ だから，$f(x_0)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$x_1=f(x_0)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1+e}{4}>\dfrac{1}{2}$　・・・③

$n=k$ のとき $x_k>\dfrac{1}{2}$ と仮定すると，

$n=k+1$ のとき $x_{k+1}=f(x_k)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1+e}{4}>\dfrac{1}{2}$　・・・④

③，④から，数学的帰納法により，$x_n>\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。

したがって，$0\leq f'(c_n)<\dfrac{1}{2}$　・・・⑤

これと③より，$|x_{n+1}-1|=|f'(c_n)||(x_n-1)|<\dfrac{1}{2}|x_n-1|<\cdots<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|x_0-1|$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|x_0-1|=0$ だから，はさみうちの原理により，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-1|=0$

すなわち $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

140

(1)

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$ より， $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ e^x\dfrac{dx}{dt}\right)$

これと $|\vec{v}|=1$ より， $\left|\dfrac{dx}{dt}\right|\sqrt{1+e^{2x}}=1$

これと $\dfrac{dx}{dt}>0$ より， $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$　　$\vec{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$

ゆえに，求める速度ベクトルは $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \dfrac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{d\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dx}\frac{dx}{dt}\\&=-\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=-\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(e^x\frac{dx}{dt}\right)\\&=\frac{de^x}{dt}\frac{dx}{dt}+e^x\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\\&=\frac{de^x}{dx}\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}+e^x\frac{d^2x}{dt^2}\\&=e^x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+e^x\frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} + e^x \left\{ -\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \right\}$$

$$= \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

または

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^x \frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^x\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^x\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \left\{ e^x\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} + e^x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{3}{2}} \right\}\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^x\left(1+e^{2x}\right)^{-1} - e^{3x}\left(1+e^{2x}\right)^{-2}$$

$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{3x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

よって，$\vec{\alpha} = \left(-\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}, \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \right)$

ゆえに，求める加速度ベクトルは$\left(-\frac{e^{2s}}{\left(1+e^{2s}\right)^2}, \frac{e^s}{\left(1+e^{2s}\right)^2} \right)$

(3)

$$|\vec{\alpha}|^2 = \left\{ -\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \right\}^2$$

$$= \frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}$$

ここで，$f(x) = \frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}$ とすると，

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)^3-e^{2x}\cdot 3\cdot 2e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)^2}{\left(1+e^{2x}\right)^6}$$
$$=\frac{2e^{2x}\left(1-2e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^4}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{\log 2}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	極大	$\downarrow$

$x=-\frac{\log 2}{2}\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}$ より，$f\left(-\frac{\log 2}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{4}{27}$

ゆえに，$\left|\vec{\alpha}\right|$ の最大値は $\sqrt{f\left(-\frac{\log 2}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$